

久留米大学医学部（前期） 数学

2022年 2月1日実施

1. x, y を実数とし、座標平面上で点 P が楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, x \geq 0$ 上を動くとき、

(1) $x + y$ の最大値は $\sqrt{\text{ア}}$ であり、最小値は $\text{イ} \sqrt{\text{ウ}}$ である。

(2) $x^2 + y$ の最大値は $\frac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$ であり、最小値は $\text{ク} \sqrt{\text{ケ}}$ である。

(3) $x^2 + xy + y^2$ の最大値は $\frac{\text{コ} + \sqrt{\text{サシ}}}{\text{ス}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\sqrt{\text{ア}}$	$\sqrt{7}$
$\text{イ} \sqrt{\text{ウ}}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$	$\frac{67}{16}$
$\text{ク} \sqrt{\text{ケ}}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{\text{コ} + \sqrt{\text{サシ}}}{\text{ス}}$	$\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$

解説

方程式 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ を変形すると、

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

より

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$$

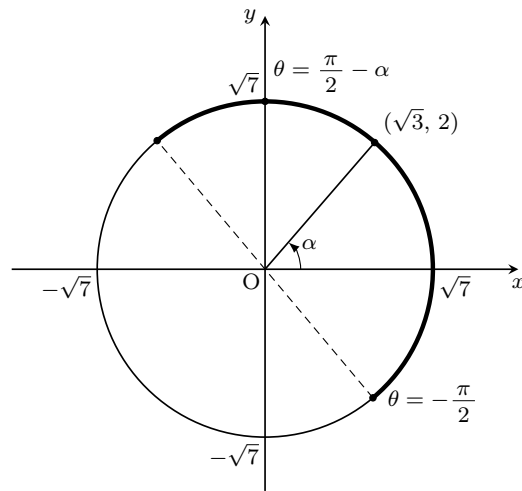
と表せる。 $x \geq 0$ より、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ としてよい。

(1)

$$x + y = 2 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$$

$$= \sqrt{7} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left(\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \right)$$



よって,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ のとき, 最大値 } \sqrt{7}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ のとき, 最小値 } -\sqrt{3}$$

(2) $t = \sin \theta$ とおくと, t のとり得る値の範囲は $-1 \leq t \leq 1$ であり,

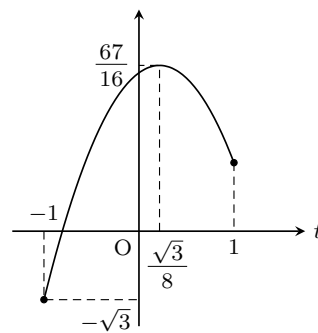
$$x^2 + y = 4 \cos^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta$$

$$= 4(1 - \sin^2 \theta) + \sqrt{3} \sin \theta$$

$$= -4 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 4$$

$$= -4t^2 + \sqrt{3}t + 4$$

$$= -4 \left(t - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)^2 + \frac{67}{16}$$



よって,

$$t = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ のとき, 最大値 } \frac{67}{16}$$

$$t = -1 \text{ のとき, 最小値 } -\sqrt{3}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy + y^2 &= 4 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \sin^2 \theta \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) + \sqrt{3} \sin 2\theta + 3 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \\
 &= \sqrt{3} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{7}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{13}}{2} \sin (2\theta + \beta) + \frac{7}{2} \\
 &\quad \left(\cos \beta = \frac{2\sqrt{39}}{13}, \sin \beta = \frac{\sqrt{13}}{13} \right)
 \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\sin (2\theta + \beta)$ のとり得る値の範囲は

$$-1 \leq \sin (2\theta + \beta) \leq 1$$

であるから, 最大値は

$$\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{7}{2} = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$

2. A, B, C, D, E, F, G, H の文字が 1 つずつ書かれたカードが 3 枚ずつ、合計 24 枚ある。この中から無作為に 3 枚のカードを取り出し、その 3 枚のカードに書かれた文字を記録する。そして、記録された 3 つの文字に対して、立方体 $ABCD - EFGH$ の頂点をとるとき、

- (1) 3 つの文字の組合せは **セソタ** 通りである。
- (2) 3 つの頂点を結んでできる三角形の個数は **チツ** 個である。
- (3) 3 つの頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形は **テト** 個できる。

解答

解答記号	正解
セソタ	120
チツ	56
テト	48

解説

- (1) 8 個の異なるものから重複を許して 3 個選ぶ場合の数を求めればよいので、

$${}_{8+3-1}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{120} \text{ (通り)}$$

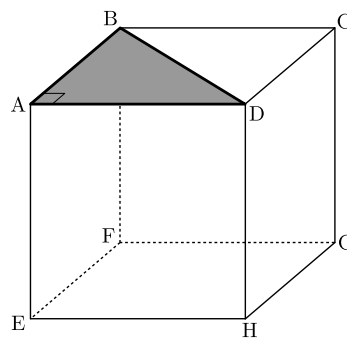
- (2) 8 個の頂点から異なる 3 個を選ぶと、ひとつの三角形に対応する。その個数は

$${}_8C_3 = \mathbf{56} \text{ (個)}$$

- (3) 直角三角形の形状で場合分けする。

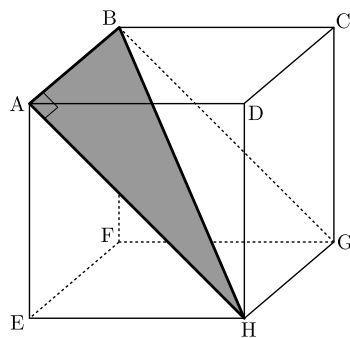
- (i) 辺の比が $1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角三角形が、各面に 4 個ずつあるので、全部で

$$4 \times 6 = 24 \text{ (個)}$$



- (ii) 辺の比が $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ の直角三角形が、1 辺につき 2 個ずつあるので、全部で

$$2 \times 12 = 24 \text{ (個)}$$



直角三角形は、この2つの形状のみなので、全部で

$$24 + 24 = \mathbf{48} \text{ (個)}$$

（ 直角三角形以外に1辺が $\sqrt{2}$ の正三角形が8個（頂点数に一致）あり、それと合わせると計 ${}_8C_3 = 56$ （個）となる。）

3. z を 2 でない複素数とし, $w = \frac{(1-2i)z}{(z-2)i}$ とおく. w が実数であるような z の全体を C とする. ただし, i は虚数単位とする.

- (1) 複素平面上で C は点 を除く, 点 + i を中心とする半径 $\sqrt{\text{ネ}}$ の円である.
- (2) C 上の点のうち, 実数である点を A とするとき, 点 A と点 $B(5-5i)$ の距離は $\sqrt{\text{ハ}}$ である.
- (3) 点 z が C 全体を動くとき, $|z - (a+6i)|$ が最小となる実数 a の値は $a = \text{ヒ}$ であり, その最小値は - $\sqrt{\text{ヘ}}$ である.

解答

解答記号	正解
ナ	2
ニ + ヌ i	$1+2i$
$\sqrt{\text{ネ}}$	$\sqrt{5}$
ノ $\sqrt{\text{ハ}}$	$5\sqrt{2}$
ヒ	1
フ - $\sqrt{\text{ヘ}}$	$4-\sqrt{5}$

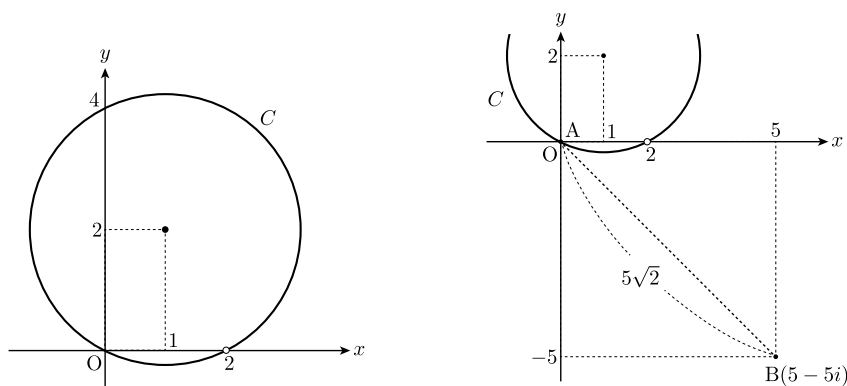
解説

- (1) w は実数なので $z \neq 2$ が必要であり, その条件下で,

$$\begin{aligned}
 w &= \bar{w} \\
 \iff \frac{(1-2i)z}{(z-2)i} &= \frac{(1+2i)\bar{z}}{(\bar{z}-2)(-i)} \\
 \iff -(1-2i)z(\bar{z}-2) &= (1+2i)\bar{z}(z-2) \\
 \iff z\bar{z} - (1-2i)z - (1+2i)\bar{z} &= 0 \\
 \iff \{z - (1+2i)\} \overline{\{z - (1+2i)\}} &= 5 \\
 \iff |z - (1+2i)| &= \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

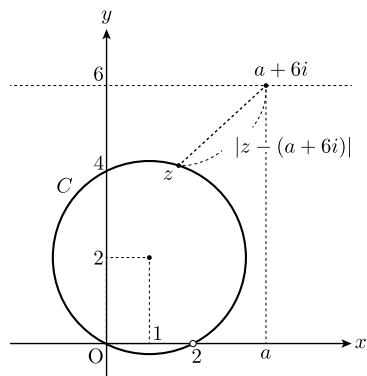
よって C は, 点 2 を除く, 点 $1+2i$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円である.

- (2) 下図より, z が実数のとき $z=0$ であるから, 点 A は原点.



よって, 点 $A(0)$ と点 $B(5-5i)$ の距離は $\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

- (3) $|z - (a+6i)|$ は, 点 z と点 $a+6i$ との距離であり, 下図より



点 $a + 6i$ が、円の中心 $1 + 2i$ の真上に来るとき、最小となるので

$$a = 1 \text{ のとき, 最小値 } 4 - \sqrt{5}$$

4. 1 辺の長さが a である正四面体の 4 つの面に接する球を C_1 とする。次に、球 C_1 に外接し、正四面体の 3 つの面に接する球を C_2 とすると、球 C_2 は 4 つできることがわかる。このことを繰り返して、球 C_n に外接し、正四面体の 3 つの面に接する C_n より小さい 4 つの球を C_{n+1} とし、球 C_n の半径を r_n とする。ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots$ である。

(1) $r_1 = \frac{\sqrt{\text{ホ}}}{\text{マミ}} a$ であり、 $r_6 = \frac{\sqrt{\text{ム}}}{\text{メモヤ}} a$ である。

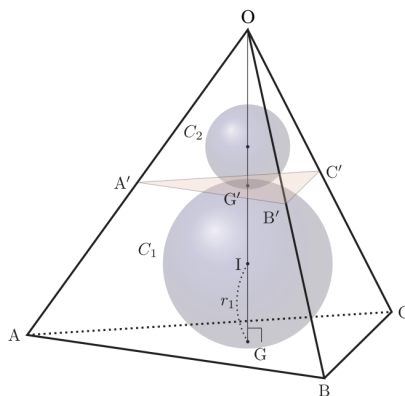
(2) この四面体の中に含まれる球 $C_1, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ の体積の和は $\frac{\text{ユヨ} \sqrt{\text{ラ}}}{\text{リルレロ}} \pi a^{\text{ワ}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\frac{\sqrt{\text{ホ}}}{\text{マミ}} a, \frac{\sqrt{\text{ム}}}{\text{メモヤ}} a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} a, \frac{\sqrt{6}}{384} a$
$\frac{\text{ユヨ} \sqrt{\text{ラ}}}{\text{リルレロ}} \pi a^{\text{ワ}}$	$\frac{11\sqrt{6}}{1512} \pi a^3$

解説

(1)



正四面体 $OABC$ の内心を I 、 $\triangle ABC$ の重心を G とする。

$$AG = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$OG = \sqrt{a^2 - AG^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

I は C_1 の中心であり、正四面体の内心と重心は一致するので、

$$OI : IG = 3 : 1$$

$$\therefore r_1 = \frac{1}{4} OG = \frac{\sqrt{6}}{12} a$$

図のように、正四面体 $OABC$ を平面 ABC に平行で G とは異なる点で C_1 に接する平面で切ったとき、辺 OA 、 OB 、 OC との交点を A' 、 B' 、 C' とする。このとき、正四面体 $OA'B'C'$ の内接球は C_2 のひとつであり、 $\triangle A'B'C'$ の重心を G' とすると、 C_1 とこの C_2 の接点は G' である。 GG' は C_1 の直径より、

$$GG' = 2r_1 = \frac{1}{2} OG$$

$$\therefore OG' = \frac{1}{2} OG$$

正四面体 $OABC$ と $OA'B'C'$ の相似比は $2 : 1$ となるので、

$$r_2 = \frac{1}{2} r_1$$

が成り立つ。 r_n と r_{n+1} の関係についても同様であるから、

$$r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$$

よって、数列 $\{r_n\}$ は、初項 r_1 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$r_6 = r_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{\sqrt{6}}{384}a$$

(1)(別解)

辺 BC の中点を M とする。 $\angle GAM = \theta$ とすると

$$\sin \theta = \frac{MG}{MO} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{r_1 - r_2}{r_2 + r_1} = \frac{1}{3} \text{ なので}$$

$$3(r_1 - r_2) = r_2 + r_1$$

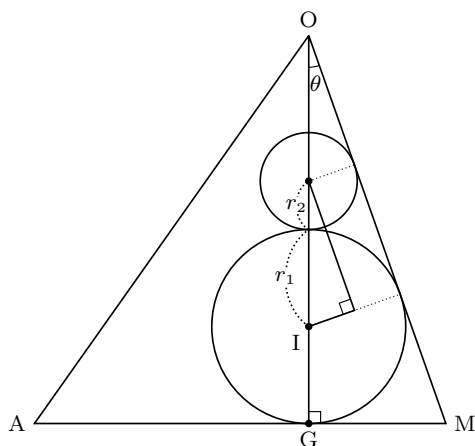
$$r_2 = \frac{1}{2}r_1$$

r_n と r_{n+1} の関係についても同様であるから、

$$r_n = r_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって、 $r_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ より

$$r_6 = \frac{\sqrt{6}}{12}a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{\sqrt{6}}{384}a$$



(2) C_n の体積を V_n とおくと、

$$V_n = \frac{4}{3}\pi r_n^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

求める体積の和を V とすると、 $n \geq 2$ のとき C_n が 4 個ずつあることに注意して、

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3 + \sum_{n=2}^{\infty} 4V_n \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3 + 4 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3 \cdot \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3 \left(1 + 4 \cdot \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3 \cdot \frac{11}{7} \\ &= \frac{11\sqrt{6}}{1512}\pi a^3 \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{11\sqrt{6}}{1512}\pi a^3$$

である。

5. 自然数 n に対して、 $\langle n \rangle$ を n の正の約数の個数を表すものとする。例えば、6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 であるから、 $\langle 6 \rangle = 4$ である。

(1) $\langle 72 \rangle - \langle 48 \rangle =$ あ である。

(2) $\langle n \rangle = 2$ を満たす n のうち、3 桁の自然数で最小のものは いうえ であり、最大のものは おかき である。

(3) $\langle n \rangle$ が奇数である n のうち、2 桁の自然数の個数は く 個である。

(4) $2\langle n \rangle^2 - 9\langle n \rangle - 7 \times \langle 81 \rangle = 0$ を満たす n のうち、3 桁の自然数は けこさ である。

解答

解答記号	正解
あ	2
いうえ , おかき	101, 997
く	6
けこさ	729

解説

(1) $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3$ より、

$$\begin{aligned}
 \langle 72 \rangle - \langle 48 \rangle &= (3+1)(2+1) - (4+1)(1+1) \\
 &= 12 - 10 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

(2) $\langle n \rangle = 2$ のとき、 n の正の約数は 1 と n 自身のみ、つまり n は素数である。3 桁の素数のうち、最小のものは **101**、最大のものは **997** である。

(3) $\langle n \rangle$ が奇数のとき、素因数分解したときの各素因数の個数はすべて偶数であるから、 n は平方数である。よって、 $4^2 (= 16)$ から $9^2 (= 81)$ までの **6 個**

(4) $\langle n \rangle = x$ とおく。 $\langle 81 \rangle = 5$ より、方程式は、

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 9x - 35 &= 0 \\
 (x-7)(2x+5) &= 0 \\
 x &= 7 \quad (\because x \text{ は自然数})
 \end{aligned}$$

よって、 n の正の約数の個数は 7 個であり、 p を素数とし、 $n = p^6$ とかける。 $2^6 = 64$, $3^6 = 729$, $5^6 > 4^6 = 4096$ より、条件を満たす 3 桁の自然数は **729** のみである。

6. 0 以上の整数 m, n に対して, $I_{m, n} = \int_1^e x^m (\log x)^n dx$ とするとき,

(1) $I_{m, 0} = \frac{e^{m+し} - す}{m + せ}$ である。

(2) $I_{m+1, n+1}$ を $I_{m+1, n}$ を用いて表すと,

$$I_{m+1, n+1} = \frac{e^{m+そ}}{m + た} - \frac{n + ち}{m + つ} I_{m+1, n}$$

(3) $I_{3, 3} = \frac{てと e^{な} + に}{128}$ である。

解答

解答記号	正解
$\frac{e^{m+し} - す}{m + せ}$	$\frac{e^{m+1} - 1}{m + 1}$
$\frac{e^{m+そ}}{m + た} - \frac{n + ち}{m + つ} I_{m+1, n}$	$\frac{e^{m+2}}{m + 2} - \frac{n + 1}{m + 2} I_{m+1, n}$
$\frac{てと e^{な} + に}{128}$	$\frac{17e^4 + 3}{128}$

解説

(1)

$$\begin{aligned} I_{m, 0} &= \int_1^e x^m dx \\ &= \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{m+1} - 1}{m+1} \end{aligned}$$

よって,

$$I_{m, 0} = \frac{e^{m+1} - 1}{m+1}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_{m+1, n+1} &= \int_1^e x^{m+1} (\log x)^{n+1} dx \\ &= \left[\frac{1}{m+2} x^{m+2} (\log x)^{n+1} \right]_1^e \\ &\quad - \int_1^e \frac{1}{m+2} x^{m+2} \cdot (n+1) (\log x)^n \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} \int_1^e x^{m+1} \cdot (\log x)^n dx \\ &= \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} I_{m+1, n} \end{aligned}$$

よって,

$$I_{m+1, n+1} = \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} I_{m+1, n}$$

(3) (1), (2) の結果より,

$$\begin{aligned}
 I_{3,3} &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{3}{4}I_{3,2} \\
 I_{3,2} &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{2}I_{3,1} \\
 I_{3,1} &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}I_{3,0} \\
 &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}(e^4 - 1)\right\} \\
 &= \frac{3e^4 + 1}{16}
 \end{aligned}$$

以下，順次代入していくと，

$$\begin{aligned}
 I_{3,2} &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3e^4 + 1}{16} \\
 &= \frac{5e^4 - 1}{32} \\
 I_{3,3} &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5e^4 - 1}{32} \\
 &= \frac{17e^4 + 3}{128}
 \end{aligned}$$

よって，

$$I_{3,3} = \frac{17e^4 + 3}{128}$$

講評

1. [式と曲線] (やや易)

- (1) 三角関数を用いて、媒介変数で表す。三角関数の合成。
- (2) 媒介変数で表して、平方完成。
- (3) 媒介変数で表して、三角関数の合成。有名角にならないが、難しくはない。

2. [場合の数] (標準)

- (1) 重複組合せ。
- (2) 典型問題。
- (3) 丁寧に数え上げればよい。

3. [複素数平面] (易)

- (1) 実数条件を使えばよい。
- (2) 図をかくと、実数になる点はすぐ見つかる。
- (3) 計算すると大変だが、式を図で表せばよい。典型問題。

4. [極限] (標準)

- (1) C_1 の中心が正四面体の重心に等しいことを覚えておくこと心強い。 r_n と r_{n+1} の関係は正四面体の相似比、もしくは対称面で切ったときの直角三角形の相似比に注目する。
- (2) C_2 以降の球は 4 個ずつできることに注意する。計算を工夫したい。

5. [整数] (標準)

- (1) 基本的には書き出していけばよい。
- (2) n が素数であることに気付きたい。
- (3) n が 2 桁の自然数より、素因数が 1 つのものから順に丁寧に調べていけばよい。
- (4) $\langle n \rangle = 7$ が出せれば、 p^6 の形しかないことが分かる。

6. [積分法 (数学Ⅲ)] (標準)

- (1) 落とせない。
- (2) $a_n = \int (\log x)^n dx$ を部分積分し、 a_{n-1} で表すタイプの問題を解いた経験があればできる。
- (3) (2) で $m = n = 2$ として、漸化式を繰り返し利用する。

全体として昨年度よりやや易化した印象。一部、計算が煩雑なもの、基本に忠実な出題である。目標は 8 割。

本解答速報の内容に関するお問合せは

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

医学部進学予備校
メビオ

☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

☎ 0120-192-215 受付 9:00~21:00(土日祝可)
福岡市中央区渡辺通4-8-20 英進館 天神本館新2号館2階
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

医学部専門予備校
YMS
YOUTH MECHANIc SYSTEM

☎ 03-3370-0410
<https://yms.ne.jp/>



無料登録で全科目を閲覧！

メールマガジン

◀ 英進館メビオのメルマガ登録はこちらから