

福岡大学医学部 数学

2022年 2月2日実施

【I】 次の をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) 実数 α が $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$ をみたすとき、 $\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \text{(1)}$ であり、 $\alpha^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{2}}} = \text{(2)}$ である。

(ii) 点 O を原点とする座標空間の 3 点を $A(4, 4, -6)$, $B(7, 1, -3)$, $C(2, 4, -2)$ とする。点 O から 2 点 A, B を通る直線に垂線 OP を下ろす。このとき、点 P の座標は (3) である。また、点 O から 3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OQ を下ろす。このとき、点 Q の座標は (4) である。

(iii) 3 人でじゃんけんを 1 人だけが勝ち残るまで続ける。あいこの場合、じゃんけんを行った全員が勝ち残るとする。3 回目のじゃんけんでは 1 人だけ勝ち残る確率は (5) である。また、3 回目のじゃんけんでは 1 人だけ勝ち残ったとき、1 回目のじゃんけんでは 3 人が勝ち残っていた確率は (6) である。ただし、3 人とも、どの手を出すかは同様に確からしいものとする。

解答

(i) (1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{5}$

(ii) (3) $(6, 2, -4)$ (4) $(2, 3, 1)$

(iii) (5) $\frac{5}{27}$ (6) $\frac{3}{5}$

解説

(i) $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$ の両辺を α ($\alpha \neq 0$) で割ると

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \quad (\alpha > 0)$$

よって、

$$\begin{aligned} \left(\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \right)^2 &= \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + 2 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^3 - 3 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + 2 \\ &= 3^3 - 3 \cdot 3 + 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} > 0 \text{ より,}$$

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \left(\alpha^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{2}}} \right)^2 &= \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5} + 2 \\ &= \left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} \right) \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + 2 \\ &= 18(3^2 - 2) - 3 + 2 \\ &= 125 \end{aligned}$$

$$\alpha^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{2}}} > 0 \text{ より,}$$

$$\alpha^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{2}}} = \sqrt{125} = \mathbf{5\sqrt{5}}$$

(ii)

$$\overrightarrow{OA} = (4, 4, -6), \quad \overrightarrow{OB} = (7, 1, -3), \quad \overrightarrow{AB} = (3, -3, 3) = 3(1, -1, 1) \text{ であり,}$$

点 P は直線 AB 上の点なので,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k(1, -1, 1) = (k+4, -k+4, k-6) \quad (k \text{ は実数})$$

とおくと, $OP \perp AB$ より,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\iff (k+4, -k+4, k-6) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\iff 3k - 6 = 0$$

$$\iff k = 2$$

よって, 点 P の座標は

$$(k+4, -k+4, k-6) = \mathbf{(6, 2, -4)}$$

さらに, 点 Q は平面 ABC 上の点であり, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 4) = 2(-1, 0, 2)$ より

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + s(1, -1, 1) + t(-1, 0, 2) = (s-t+4, -s+4, s+2t-6) \quad (s, t \text{ は実数})$$

とおくと, $OQ \perp$ 平面 ABC より,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (s-t+4, -s+4, s+2t-6) \cdot (1, -1, 1) = 0 \\ (s-t+4, -s+4, s+2t-6) \cdot (-1, 0, 2) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 3s+t-6=0 \\ s+5t-16=0 \end{cases} \\ \iff & s=1, t=3 \end{aligned}$$

よって, 点 Q の座標は

$$(s-t+4, -s+4, s+2t-6) = \mathbf{(2, 3, 1)}$$

(iii) 以下，じゃんけんによって起こる人数変化を矢印で表すこととする。例えば，1 回目のじゃんけんで，人数が 3 人から 1 人になる場合， $3 \rightarrow 1$ と表すこととする。

$$3 \rightarrow 3 \text{ となる確率は } \frac{3!+3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

$$3 \rightarrow 2 \text{ となる確率は } \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

$$3 \rightarrow 1 \text{ となる確率は } \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

$$2 \rightarrow 2 \text{ となる確率は } \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$$

$$2 \rightarrow 1 \text{ となる確率は } \frac{2 \cdot 3}{3^2} = \frac{2}{3}$$

3 回目のじゃんけんで 1 人だけ勝ち残るのは，(ア) $3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ，(イ) $3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ，(ウ) $3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ の 3 つの場合である。

$$(ア) \ 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \text{ のとき, } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$(イ) \ 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \text{ のとき, } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

$$(ウ) \ 3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \text{ のとき, } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

以上より，求める確率は，

$$\frac{1+2+2}{27} = \frac{5}{27}$$

さらに，

事象 A：「3 回目のじゃんけんで 1 人だけが勝ち残る」

事象 B：「1 回目のじゃんけんで 3 人が勝ち残る」

とすると， $A \cap B$ は (ア) と (イ) の場合で，

$$P(A \cap B) = \frac{3}{27}$$

よって，

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{5}$$

【II】 次の をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) 楕円 $C: 4x^2 + y^2 = 4$ と直線 $\ell: 2x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ は 2 点 A(0, -2) と B で交わる時、点 B の座標は (1) である。また、楕円 C 上の点を P とするとき、点 P と直線 ℓ の距離が最大となる時の点 P の座標は (2) である。

(ii) 実数 x, y が不等式 $\log_y(1 - x^2 + y) \geq 2$ をみたすとき、 y の取り得る値の範囲は (3) であり、 x の取り得る値の範囲は (4) である。

解答

(i) (1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ (2) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$

(ii) (3) $0 < y < 1, 1 < y \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ (4) $-\sqrt{2} < x < -1, -1 < x < 1, 1 < x < \sqrt{2}$

解説

(i)

$$C: 4x^2 + y^2 = 4 \dots\dots\dots ①$$

$$\ell: 2x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0 \dots\dots\dots ②$$

② より,

$$2x = -\sqrt{3}(y + 2) \dots\dots\dots ③$$

③ を ① に代入して,

$$3(y + 2)^2 + y^2 = 4$$

$$\iff y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$\iff (y + 1)(y + 2) = 0$$

$$\therefore y = -1, -2$$

$y = -1$ のとき, ③ より,

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって,

$$\mathbf{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$$

また、点 P と直線 ℓ の距離が最大となる時、点 P における C の接線の傾きは ℓ の傾き $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ と等しい。

① の両辺を x で微分して,

$$8x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$$

$P(\alpha, \beta)$ とすると、点 P は C 上の点なので,

$$4\alpha^2 + \beta^2 = 4 \dots\dots\dots ④$$

点 P における接線の傾きが等しいことから,

$$-\frac{4\alpha}{\beta} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\iff \beta = 2\sqrt{3}\alpha \dots\dots\dots ⑤$$

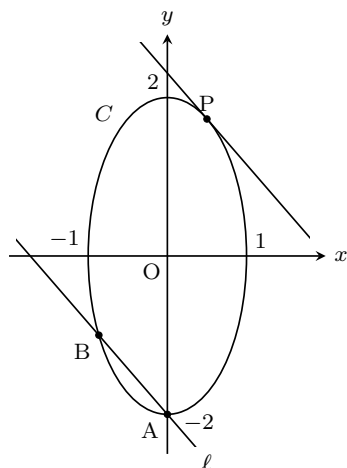
⑤ を ④ へ代入して,

$$16\alpha^2 = 4$$

$$\therefore \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

距離が最大になるのは、下図より、 $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき。よって,

$$P\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$$



(別解)

$0 \leq \theta < 2\pi$ に対し, $P(\cos \theta, 2 \sin \theta)$ とおくと, ℓ と点 P の距離は,

$$\frac{|2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{4+3}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \left| 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} \right|$$

これは, $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ のとき最大となる。

このとき,

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

より,

$$\begin{aligned} \theta + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

よって,

$$P\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$$

(ii) 底の条件より,

$$0 < y < 1, 1 < y \dots\dots\dots ①$$

真数条件より,

$$\begin{aligned} 1 - x^2 + y &> 0 \\ \therefore y &> x^2 - 1 \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

$\log_y (1 - x^2 + y) \geq 2$ より,

$$\log_y (1 - x^2 + y) \geq \log_y y^2 \dots\dots\dots ③$$

(a) $y > 1 \dots\dots\dots ④$ のとき,

③ より,

$$\begin{aligned} 1 - x^2 + y &\geq y^2 \\ \therefore x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &\leq \frac{5}{4} \dots\dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

(b) $0 < y < 1 \dots\dots\dots ⑥$ のとき,

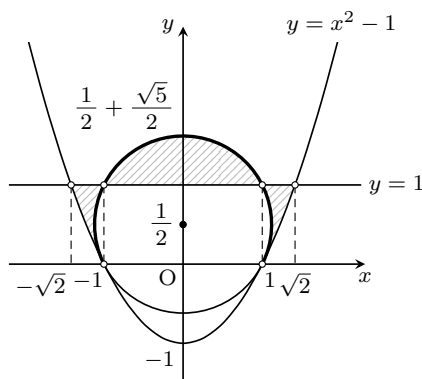
③ より,

$$\begin{aligned} 1 - x^2 + y &\leq y^2 \\ \therefore x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &\geq \frac{5}{4} \dots\dots\dots ⑦ \end{aligned}$$

(a), (b) より, x, y のみたす条件は,

「① かつ ② かつ ④ かつ ⑤」または「① かつ ② かつ ⑥ かつ ⑦」

であり, $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ と $y = 1$ の交点の x 座標は ± 1 , $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ と $y = x^2 - 1$ の交点の x 座標は $\pm\sqrt{2}$ より, 図示すると下図の斜線部分。境界は, 太線で示した円 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ の周上のみ含み, 他は含まず。



x, y の取り得る値の範囲は,

$$\begin{aligned} y \text{ の範囲 } & 0 < y < 1, 1 < y \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x \text{ の範囲 } & -\sqrt{2} < x < -1, -1 < x < 1, 1 < x < \sqrt{2} \end{aligned}$$

【III】（記述問題）

a を正の定数とし、媒介変数 t によって

$$x = e^{-2} - e^{at}, \quad y = -2t + e^{2at}$$

で表されている曲線 C が、 x 軸と接しているとする。このとき、次の間に答えよ。

ただし、 e は自然対数の底とする。

(i) a の値を求めよ。

(ii) x 軸、 y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

詳解を参照。

解説

(i)

$$\frac{dx}{dt} = -ae^{at} < 0$$

より、 x は単調減少する。

また、

$$\frac{dy}{dt} = -2 + 2ae^{2at}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{ae^{at}} - 2e^{at}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ とすると,}$$

$$\frac{2}{ae^{at}} - 2e^{at} = 0$$

$$\frac{2}{ae^{at}} = 2e^{at}$$

$$e^{2at} = \frac{1}{a}$$

両辺正より、自然対数をとると、

$$\log e^{2at} = \log \frac{1}{a}$$

$$2at = -\log a$$

$$t = -\frac{1}{2a} \log a$$

曲線 C が x 軸と接することから、 $t = -\frac{1}{2a} \log a$ で $y = 0$ となればよい。

$y = -2t + e^{2at}$ に代入すると、

$$\frac{1}{a} \log a + e^{-\log a} = 0$$

$$\frac{1}{a} \log a + \frac{1}{a} = 0$$

$$\log a = -1$$

$$a = \frac{1}{e}$$

(ii) (i) より,

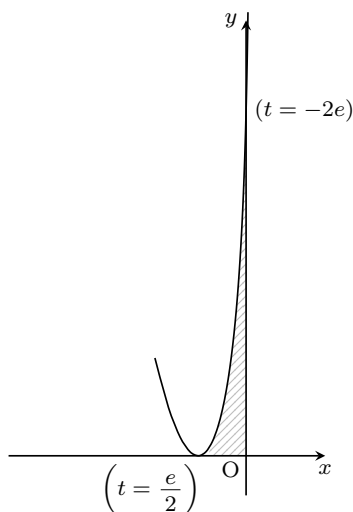
$$x = e^{-2} - e^{\frac{t}{e}}, \quad y = -2t + e^{\frac{2}{e}t}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{e} \cdot e^{\frac{t}{e}}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 + \frac{2}{e} \cdot e^{\frac{2}{e}t}$$

$\frac{dy}{dt} = 0$ とすると, $t = \frac{e}{2}$ より, 増減表は以下の通りである。

t	$\cdots$	$\frac{e}{2}$	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$-$		$-$
$\frac{dy}{dt}$	$-$	0	$+$
(x, y)	$\swarrow$	$(e^{-2} - e^{\frac{1}{2}}, 0)$	$\nwarrow$

$x = 0$ とすると, $t = -2e$ であるから,



求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{e^{-2} - e^{\frac{1}{2}}}^0 y \, dx \\
 &= \int_{\frac{e}{2}}^{-2e} (-2t + e^{\frac{2}{e}t}) \cdot \left(-\frac{1}{e} e^{\frac{t}{e}}\right) dt \\
 &= \int_{-2e}^{\frac{e}{2}} \left(\frac{1}{e} e^{\frac{3}{e}t} - \frac{2t}{e} e^{\frac{t}{e}}\right) dt \\
 &= \left[\frac{1}{3} e^{\frac{3}{e}t}\right]_{-2e}^{\frac{e}{2}} - \frac{2}{e} \left\{ \left[t \cdot e \cdot e^{\frac{t}{e}}\right]_{-2e}^{\frac{e}{2}} - e \int_{-2e}^{\frac{e}{2}} e^{\frac{t}{e}} dt \right\} \\
 &= \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} e^{-6} - \frac{2}{e} \left(\frac{e^{\frac{5}{2}}}{2} + 2 \right) + 2 \left[e \cdot e^{\frac{t}{e}} \right]_{-2e}^{\frac{e}{2}} \\
 &= \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} e^{-6} - e^{\frac{3}{2}} - 4e^{-1} + 2 \left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-1} \right) \\
 &= \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} e^{-6} - 6e^{-1}
 \end{aligned}$$

よって, 求める面積は,

$$\frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}} - 6e^{-1} - \frac{1}{3} e^{-6}$$

講評

〔Ⅰ〕 〔小問集合〕（やや易）

- (i) $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ を利用して、二乗や積の値を求める典型問題。
- (ii) 原点から直線や平面に下ろした垂線の足を求める基本問題。
- (iii) 勝ち残る人数で場合分けすればよい。3 人のじゃんけんなので計算は楽。後半は条件付き確率。

〔Ⅱ〕 〔小問集合〕 ((i)易 (ii)標準)

- (i) (1)は連立するだけなので、確実に解答したい。
(2)は点 P における接線の傾きが ℓ の傾きと等しいことを利用する。または、点 P を媒介変数で表し、点 P と直線 ℓ の距離を計算してもよい。
- (ii) 対数不等式を解いて、 (x, y) のみたす領域を求める。放物線と円の位置関係や等号の有無に注意して解答しよう。

〔Ⅲ〕 〔数Ⅲの微分法・積分法〕（標準）

- (i) もちろん、 C が x 軸と接するという条件を正しく言い換えることができるかがポイントとなる。ここでは、「 $\frac{dy}{dx} = 0$ をみたす t で y 座標が 0 となる」とした。媒介変数表示された曲線については、あまり解いた経験がないのではないだろうか。差が付きそうである。
- (ii) 増減表を用いて C の概形を描き、題意の領域や積分区間を正しく把握することが必要である。計算もやや繁雑で慎重にやらないと簡単にミスしてしまいそうである。

昨年に引き続き、大問〔Ⅰ〕と大問 2 は典型問題を中心に出题された。様々な単元を聞かれるので、苦手単元なく基本事項を理解していることが重要。大問〔Ⅱ〕(ii)を完答するのは難しい。大問〔Ⅲ〕は、媒介変数で表された曲線が x 軸に接する、というのに戸惑ったかもしれない。計算も多少繁雑である。目標点数は 65 %。

本解答速報の内容に関するお問合せは

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

医学部専門予備校
メビオ

☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

☎ 0120-192-215 受付 9:00~21:00(土日祝可)
福岡市中央区渡辺通4-8-20 英進館 天神本館新2号館2階
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

医学部専門予備校
YMS
YMS of medicine

☎ 03-3370-0410
<https://yms.ne.jp/>



無料登録で全科目を閲覧！

メールマガジン

◀ 英進館メビオのメルマガ登録はこちらから